

# Homogénéisation de surfaces microstructurées pour l'acoustique en présence d'un écoulement

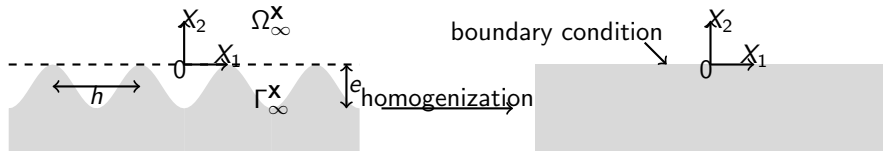
J. F. Mercier

POEMS, CNRS, INRIA, ENSTA-PARIS, Palaiseau, France

# Plan

- ▶ **Introduction**
- ▶ Equations du problème
- ▶ Modèle homogénéisé
- ▶ Dérivation du modèle homogénéisé
- ▶ Validation
- ▶ Conclusion-perspectives

# Introduction



- Sans écoulement  
Modèle exact :

$$\begin{cases} (\Delta_{\mathbf{x}} + k^2) \varphi = 0 & \text{in } \Omega_{\infty}^{\mathbf{x}}, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma_{\infty}^{\mathbf{x}}. \end{cases}$$

- Modèle homogénéisé :

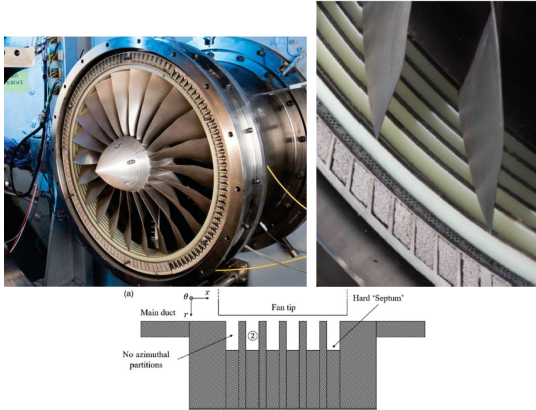
$$\begin{cases} (\Delta_{\mathbf{x}} + k^2) \varphi^h = 0 & \text{for } X_2 > 0, \\ \frac{\partial \varphi^h}{\partial X_2} + hC \left( \frac{\partial^2 \varphi^h}{\partial X_1^2} \right) + k^2 hS \varphi^h = 0 & \text{at } X_2 = 0. \end{cases}$$

Marigo, J. J., and Maurel, A., Homogenization models for thin rigid structured surfaces and films, JASA, 140(1) (2016).

- But : avec écoulement ?

# Applications

Réduire bruit réacteur d'avion



Palleja-Cabre, Sergi, et al., Impedance modelling of acoustically treated circumferential grooves for over-tip-rotor fan noise suppression, International Journal of Aeroacoustics 19(6-8) (2020).

# Plan

- ▶ Introduction
- ▶ Equations du problème
- ▶ Modèle homogénéisé
- ▶ Dérivation du modèle homogénéisé
- ▶ Validation
- ▶ Conclusion-perspectives

# Difficulté principale : la modélisation

Modèle naturel : équations d'Euler compressibles

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \\ \tilde{\rho} \left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} \right] + \nabla \tilde{p} = \mathbf{0}, \quad \rightarrow \text{trop compliqué} \\ \tilde{p} = \mu \tilde{\rho}^\gamma \quad (\text{si } \tilde{s} = \text{cst}). \end{array} \right.$$

Double difficulté :

**Écoulement porteur** = solution particulière stationnaire (non-linéaire)

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0, \\ \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \nabla p_0 = \mathbf{0}, \\ p_0 = \mu \rho_0^\gamma. \end{array} \right.$$

**Perturbations acoustiques de l'écoulement** :

$$\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad \tilde{p}(\mathbf{x}, t) = p_0(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \dots$$

↪ équations d'Euler linéarisées

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 (-i\omega + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + \rho_0 (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{0}, \\ -i\omega p + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}_0) = 0, \\ p = c_0^2 \rho. \end{array} \right.$$

## Cas plus simple

Ecoulement **potentiel**,  $\mathbf{U} = \nabla_{\mathbf{x}}\Phi \Rightarrow$  perturbations  $\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{x}}\varphi$   
satisfaisant **Helmholtz convectée**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\rho_0 \mathbf{U}) = 0 & \text{in } \Omega_{\infty}^{\mathbf{x}}, \\ \rho_0 D_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{c_0^2} D_{\mathbf{x}} \varphi \right) = \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\rho_0 \nabla_{\mathbf{x}} \varphi) & \text{in } \Omega_{\infty}^{\mathbf{x}}, \\ c_0^2 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 (1 - |\mathbf{U}|^2) = \rho_0^{\gamma-1} & \text{in } \Omega_{\infty}^{\mathbf{x}}. \end{array} \right.$$

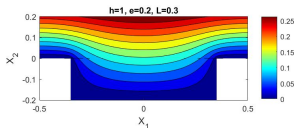
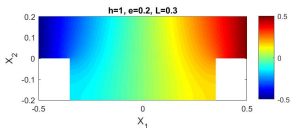
avec  $D_{\mathbf{x}} = M \mathbf{U} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - ik$  où  $M = U_{\infty}/c_{\infty}$  le nombre de Mach à l'infini

Problème : l'écoulement porteur satisfait une équation non-linéaire  
 $\operatorname{div}_{\mathbf{x}}[\rho_0(\mathbf{U}\mathbf{U})] = 0$ .

# Simplifications pour écoulement de faible Mach

En négligeant les termes d'ordre  $M^2$ , on obtient  $c_0 \simeq 1$  et  $\rho_0 \simeq 1$ :  
 $\hookrightarrow$  l'écoulement porteur satisfait l'équation linéaire

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{x}} \phi = 0 & \text{in } \Omega_{\infty}^{\mathbf{x}}, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \phi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma_{\infty}^{\mathbf{x}}, \end{cases}$$



et on obtient l'équation d'onde de Taylor :

$$\begin{cases} (\Delta_{\mathbf{x}} + k^2)\varphi + 2ikM\nabla_{\mathbf{x}}\phi \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\varphi = 0 & \text{in } \Omega_{\infty}^{\mathbf{x}}, \\ \nabla_{\mathbf{x}}\varphi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma_{\infty}^{\mathbf{x}}. \end{cases}$$



# Plan

- ▶ Introduction
- ▶ Equations du problème
- ▶ **Modèle homogénéisé**
- ▶ Dérivation du modèle homogénéisé
- ▶ Validation
- ▶ Conclusion-perspectives

## Modèle homogénéisé

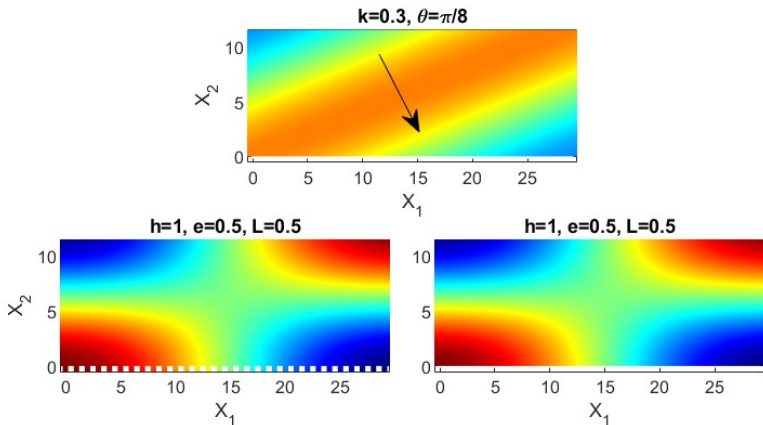
Modèle faible Mach :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_{\mathbf{x}} \Phi = 0 & \text{in } \Omega_{\infty}^{\mathbf{x}}, \\ (\Delta_{\mathbf{x}} + k^2)\varphi + 2ikM \nabla_{\mathbf{x}} \Phi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \varphi = 0 & \text{in } \Omega_{\infty}^{\mathbf{x}}, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \Phi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma_{\infty}^{\mathbf{x}}, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma_{\infty}^{\mathbf{x}}, \\ \lim_{X_2 \rightarrow \infty} \nabla_{\mathbf{x}} \Phi = \frac{\mathbf{U}_{\infty}}{U_{\infty}}, & \\ \text{+conditions radiations.} & \end{array} \right.$$

On va trouver le modèle homogénéisé :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_{\mathbf{x}} \Phi^h = 0, & \text{for } X_2 > 0, \\ (\Delta_{\mathbf{x}} + k^2 + 2ikM \nabla_{\mathbf{x}} \Phi^h \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \varphi^h = 0, & \text{for } X_2 > 0, \\ \frac{\partial \Phi^h}{\partial X_2} + hC \frac{\partial^2 \Phi^h}{\partial X_1^2} = 0 & \text{at } X_2 = 0, \\ \frac{\partial \varphi^h}{\partial X_2} + hC \left( \frac{\partial^2 \varphi^h}{\partial X_1^2} + 2ikM \frac{\partial \Phi^h}{\partial X_1} \frac{\partial \varphi^h}{\partial X_1} \right) + k^2 hS \varphi^h = 0, & \text{at } X_2 = 0. \end{array} \right.$$

## Exemple pour $M = 0.4$



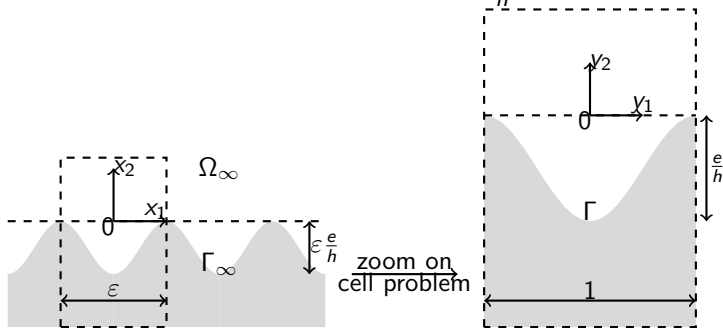
# Plan

- ▶ Introduction
- ▶ Equations du problème
- ▶ Modèle homogénéisé
- ▶ **Dérivation du modèle homogénéisé**
- ▶ Validation
- ▶ Conclusion-perspectives

# Dérivation du modèle homogénéisé

Combine deux ingrédients :

- développements multi-échelles :  $\varepsilon = kh = 2\pi \frac{\lambda}{h}$



Proche de la surface  $\Gamma_\infty$  :  $\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{y}$  et

$$\begin{cases} \Phi(x_1, x_2) = \Psi^0(x_1, y_1, y_2) + \varepsilon \Psi^1(x_1, y_1, y_2) + \dots, \\ \varphi(x_1, x_2) = \psi^0(x_1, y_1, y_2) + \varepsilon \psi^1(x_1, y_1, y_2) + \dots \end{cases}$$

# Dérivation du modèle homogénéisé

- raccordements asymptotiques

Loin de la surface rigide, les inconnues sont cherchées de la forme

$$\begin{cases} \Phi(x_1, x_2) &= \Phi^0(x_1, x_2) + \varepsilon \Phi^1(x_1, x_2) + \dots, \\ \varphi(x_1, x_2) &= \varphi^0(x_1, x_2) + \varepsilon \varphi^1(x_1, x_2) + \dots. \end{cases}$$

Les conditions de raccord sont

$$\begin{cases} \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \psi^0(x_1, y_1, y_2) &= \lim_{x_2 \rightarrow 0} \varphi^0(x_1, x_2) = \varphi^0(x_1, 0), \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \left( \psi^1(x_1, y_1, y_2) - y_2 \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2}(x_1, 0) \right) &= \varphi^1(x_1, 0). \end{cases}$$

## A l'ordre 0

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{x}} \Phi^0 = 0, & \text{for } x_2 > 0 \\ \frac{\partial \Phi^0}{\partial x_2} = 0, & \text{at } x_2 = 0, \end{cases}$$

pour l'écoulement porteur et

$$\begin{cases} (\Delta_{\mathbf{x}} + 1 + 2iM \nabla_{\mathbf{x}} \Phi^0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \varphi^0 = 0, & \text{for } x_2 > 0 \\ \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2} = 0, & \text{at } x_2 = 0, \end{cases}$$

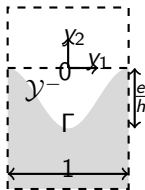
pour les perturbations acoustiques.

## A l'ordre 1

$$\psi^1(x_1, \mathbf{y}) = Q(\mathbf{y}) \frac{d\psi^0}{dx_1} + \hat{\psi}(x_1) \quad \text{in } \mathcal{Y},$$

où la fonction de cellule  $Q$  satisfait le problème de cellule :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\mathbf{y}} Q = 0 \quad \text{in } \mathcal{Y}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} Q \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma, \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \nabla_{\mathbf{y}} Q(y_1, y_2) = 0, \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} Q(y_1, y_2) = 0. \end{array} \right.$$



On obtient les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_2} + C \left( \frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial x_1^2} + 2iM \frac{\partial \Phi^0}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1} \right) + S \varphi^0 = 0, \quad \text{at } x_2 = 0, \\ \frac{\partial \Phi^1}{\partial x_2} + C \frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial x_1^2} = 0, \quad \text{at } x_2 = 0, \end{array} \right.$$

où

$$C = S + \int_{y^-} \frac{\partial Q}{\partial y_1} dy \quad \text{avec} \quad S = \int_{y^-} dy.$$



## Dérivation d'un modèle homogénéisé unifié

En notant  $\varphi^h = \varphi^0 + \varepsilon\varphi^1$  et  $\Phi^h = \Phi^0 + \varepsilon\Phi^1$ , on déduit le modèle à l'ordre  $O(\varepsilon^2)$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_{\mathbf{x}} \Phi^h = 0, & \text{for } X_2 > 0, \\ (\Delta_{\mathbf{x}} + k^2 + 2ikM \nabla_{\mathbf{x}} \Phi^h \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \varphi^h = 0, & \text{for } X_2 > 0, \\ \frac{\partial \Phi^h}{\partial X_2} + hC \frac{\partial^2 \Phi^h}{\partial X_1^2} = 0 & \text{at } X_2 = 0, \\ \frac{\partial \varphi^h}{\partial X_2} + hC \left( \frac{\partial^2 \varphi^h}{\partial X_1^2} + 2ikM \frac{\partial \Phi^h}{\partial X_1} \frac{\partial \varphi^h}{\partial X_1} \right) + k^2 h S \varphi^h = 0, & \text{at } X_2 = 0. \end{array} \right.$$

# Plan

- ▶ Introduction
- ▶ Equations du problème
- ▶ Modèle homogénéisé
- ▶ Dérivation du modèle homogénéisé
- ▶ **Validation**
- ▶ Conclusion-perspectives

## Cas particulier plus simple

Ecoulement horizontal à l'infini  $\lim_{X_2 \rightarrow \infty} \mathbf{U} = \mathbf{e}_1$  conduit à

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_{\mathbf{x}} \Phi^h = 0, & \text{for } X_2 > 0, \\ \frac{\partial \Phi^h}{\partial X_2}(X_1, 0) + hC \frac{\partial^2 \Phi^h}{\partial X_1^2}(X_1, 0) = 0, & \text{at } X_2 = 0, \\ \lim_{X_2 \rightarrow \infty} \Phi^h(\mathbf{X}) = X_1. & \end{array} \right.$$

La solution est  $\Phi^h(\mathbf{X}) = X_1$  et le modèle homogénéisé se simplifie en

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left( \Delta_{\mathbf{x}} + k^2 + 2ikM \frac{\partial}{\partial X_1} \right) \varphi^h = 0, & \text{for } X_2 > 0, \\ \frac{\partial \varphi^h}{\partial X_2} + hC \left( \frac{\partial^2 \varphi^h}{\partial X_1^2} + 2ikM \frac{\partial \varphi^h}{\partial X_1} \right) + k^2 hS \varphi^h = 0, & \text{at } X_2 = 0. \end{array} \right.$$

## Solution explicite du problème homogénéisé

Pour une onde incidente plane, la solution du modèle homogénéisé est

$$\varphi^h(\mathbf{X}) = e^{ik_1 X_1} [e^{-ik_2 X_2} + R^h e^{ik_2 X_2}],$$

où le coefficient de réflexion est

$$R^h = \frac{ik_2 + a}{ik_2 - a} \quad \text{where} \quad a = h[(k_1^2 + 2k_1 k M)C - k^2 S].$$

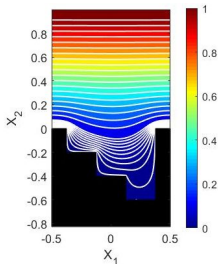
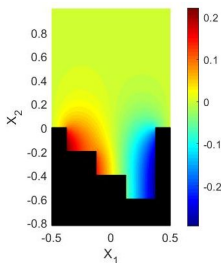
# Résolution du problème exact

- Ecoulement porteur

Pour une vitesse  $e_1$  imposée à l'infini, l'écoulement porteur  $\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \nabla_{\mathbf{X}}\Phi$  satisfait

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{X}}\Phi = 0 & \text{in } \Omega_{\infty}^{\mathbf{X}}, \\ \nabla_{\mathbf{X}}\Phi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma_{\infty}^{\mathbf{X}}, \\ \lim_{X_2 \rightarrow \infty} \Phi = X_1. \end{cases}$$

On cherche  $\tilde{Q}(\mathbf{X}) = \Phi(\mathbf{X}) - X_1$   
la perturbation de l'écoulement uniforme  $\rightarrow$  c'est la solution du problème de cellule



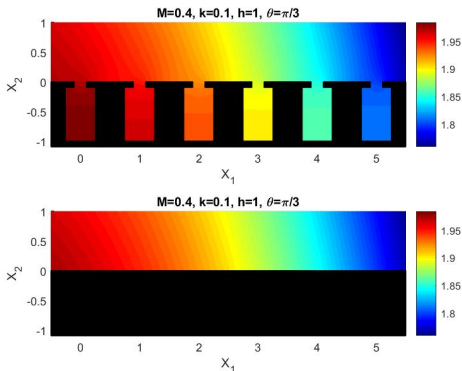
- Acoustique :

$$\begin{cases} (\Delta_{\mathbf{X}} + k^2)\varphi + 2ikM\nabla_{\mathbf{X}}\Phi \cdot \nabla_{\mathbf{X}}\varphi = 0 & \text{in } \Omega_{\infty}^{\mathbf{X}}, \\ \nabla_{\mathbf{X}}\varphi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma_{\infty}^{\mathbf{X}}. \end{cases}$$

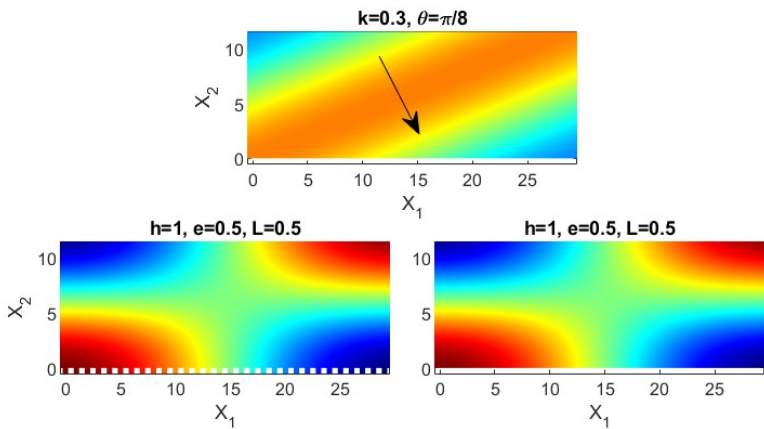
# Validation du modèle homogénéisé

Cavités,  $M = 0.4$

$S = 0.47$  et la résolution du problème de cellule donne  $C = 0.0065$ .

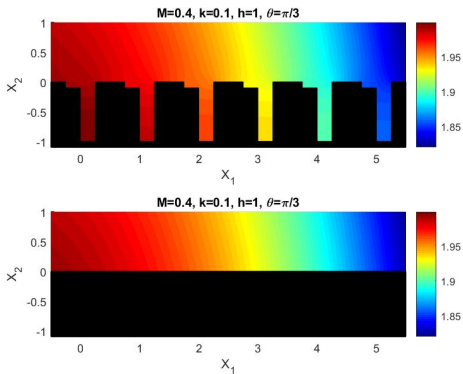


$$E_r^R = \frac{|R_0 - R^h|}{|R_0|} = 19 \cdot 10^{-4} \quad \text{et} \quad E_r^\varphi = \frac{\|\varphi(\mathbf{X}) - \varphi^h(\mathbf{X})\|_{L^2(\Omega)}}{\|\varphi(\mathbf{X})\|_{L^2(\Omega)}} = 0.011.$$



# Cavités Tétris

$S = 0.275$  et  $C = 0.014$ .

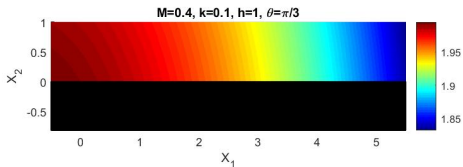
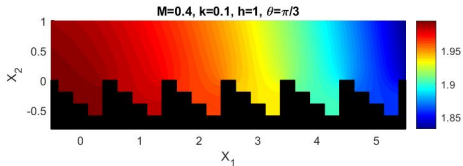


$E_r^R = 23.10^{-4}$  et  $E_r^\varphi = 7.910^{-4}$ .



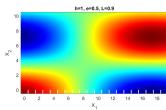
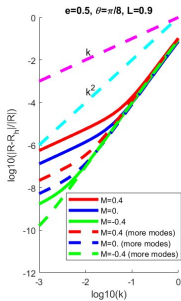
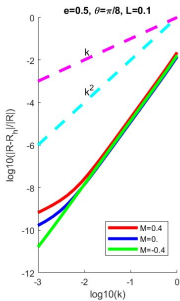
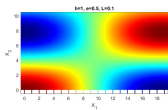
# Cavités en escalier

$S = 0.3$  et  $C = 0.089$



$$E_r^R = 1.7 \cdot 10^{-4} \text{ and } E_r^\varphi = 0.011.$$

# Erreur en $\varepsilon^2$ où $\varepsilon = kh = k$ ?



# Plan

- ▶ Introduction
- ▶ Equations du problème
- ▶ Modèle homogénéisé
- ▶ Dérivation du modèle homogénéisé
- ▶ Validation
- ▶ Conclusion-perspectives

# Perspectives

- Ne pas se limiter à  $M$  petit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\rho_0 \mathbf{U}) = 0 & \text{in } \Omega_{\infty}^{\mathbf{x}}, \\ \rho_0(M\mathbf{U} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - ik) \left( \frac{1}{c_0^2}(M\mathbf{U} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - ik)\varphi \right) = \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\rho_0 \nabla_{\mathbf{x}}\varphi) & \text{in } \Omega_{\infty}^{\mathbf{x}}, \\ c_0^2 = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2(1 - |\mathbf{U}|^2) = \rho_0^{\gamma-1} & \text{in } \Omega_{\infty}^{\mathbf{x}}. \end{array} \right.$$

- Ne pas se limiter à un écoulement irrotationnel :

écoulement cisailé  $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = U(x_2)\mathbf{e}_1 \Rightarrow$   
 $\rho_0 = \text{cste} = \rho_0.$

