

Simulation numérique des équations dispersives: approche du Lagrangien étendu

Nicolas Favrie

Aix-Marseille Université, IUSTI, UMR CNRS 7343

Workshop : Propagation d'ondes dans les milieux dispersif
5 Octobre 2018

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = S(\mathbf{U})$$

- Hyperbolique : Toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ sont réelles et \mathbf{A} possède autant de vecteurs propres que de variables \mathbf{U} .
- Le système est bien posé si le système admet une loi de conservation supplémentaire (énergie) et que cette énergie diminue (si le système est dissipatif).

Contexte :

- Dynamique Non linéaire
- Schéma explicite

Pourquoi hyperboliser :

- Propagation de l'information et de l'énergie à vitesse finie (relativité restreinte)
- Pas de temps $\Delta t \propto \Delta x$
- Problème local en espace et en temps
- Parallélisation efficace par décomposition de domaine
- Grande variété de schémas disponibles Godunov, WENO 4, ADER 9, schémas décalés...

Idée : Transformer les équations dispersives en équations hyperboliques avec termes sources

- Système d'équations en coordonnées Eulériennes

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad p = \frac{gh^2}{2} + \frac{1}{3}h^2\ddot{h}$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2 + p}{\partial x} = 0, \quad \dot{h} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x},$$

h Hauteur d'eau

u vitesse moyenne

$$\ddot{h} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \dot{h}.$$

- Lagrangien (Gavrilyuk Teshukov 2001) :

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{hu^2}{2} - W(h, \dot{h}) \right) dx, \quad W(h, \dot{h}) = \frac{gh^2}{2} - \frac{h\dot{h}^2}{6}.$$

Autre applications : liquide en présence de bulles

Comment résoudre les termes en h_{ttx} ??

- Principe
 - Ajouter des variables supplémentaires pour 'relaxer' les dérivées temporelles
- Propriété du modèle dérivé à partir des équations d'Euler-Lagrange
 - Le modèle doit être hyperbolique partout
 - Dans la limite, le Lagrangien doit permettre de retrouver le Lagrangien initial
 - Les vitesses de phases du système étendu doivent encadrer la vitesse de phase du système original

Exemple (inutile pour ceux qui ont tout compris)

Lagrangien de base ('master' lagrangien) :

$$L = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{x^2}{2}$$

équations d'Euler - Lagrange :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0.$$

Lagrangien augmenté :

$$\hat{L} = \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{x^2}{2} - \lambda \frac{(y-x)^2}{2}.$$

Equations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda(y-x) = 0, \quad -x + \lambda(y-x) = 0.$$

On aura :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \quad x(t, \lambda) = \omega^2 y(t, \lambda), \quad \omega^2 = \frac{\lambda}{1 + \lambda}.$$

Solution du problème de Cauchy $y(0) = A$, $\dot{y}(0) = B$:

$$y(t, \lambda) = A \cos(\omega t) + \frac{B}{\omega} \sin(\omega t),$$

$$x(t, \lambda) = \omega^2 \left(A \cos(\omega t) + \frac{B}{\omega} \sin(\omega t) \right).$$

On a :

$$|y(t, \lambda) - x(t, \lambda)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Comment comparer la solution exacte et la solution approchée ?

Les solutions sont proches, si :

- Les amplitudes sont proches
- Les périodes sont proches

Mais pas les phases ! Une sorte de stabilité orbitale...

Pour notre cas :

$$y(t, \lambda) = \sqrt{A^2 + \frac{B^2}{\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_\omega), \quad \varphi_\omega = \arcsin\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + \frac{B^2}{\omega^2}}}\right),$$

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{1 + \lambda},$$

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(t + \varphi_1), \quad \varphi_1 = \arcsin\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right).$$

$$q = \int_0^X h_0(s) ds,$$

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{2} - \tilde{W}(\tau, \tau_t)$$

$$u = x_t, \quad \frac{1}{h} = \tau = x_q, \quad \tilde{W}(\tau, \tau_t) = \frac{g}{2\tau} - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial 1/\tau}{\partial t} \right)^2.$$

Système d'équations :

$$\tau_t - u_q = 0, \quad u_t + p_q = 0,$$

avec

$$p = -\frac{\delta \tilde{W}}{\delta \tau} = -\left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tau_t} \right) \right) = \frac{g}{2\tau^2} + \frac{2}{3} \frac{\tau_t^2}{\tau^5} - \frac{1}{3} \frac{\tau_{tt}}{\tau^4}.$$

Lagrangien original : $\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_t^2}{2} + \frac{(1/\tau)_t^2}{6} - \frac{g}{2\tau} dq$

Lagrangiens étendus

① $\hat{\mathcal{L}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_t^2}{2} + \frac{\eta_t^2}{6} - \frac{g}{2\tau} - \lambda \frac{(\eta - \frac{1}{\tau})^2}{6} dq$

② $\hat{\mathcal{L}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_t^2}{2} + \frac{\eta_t^2}{6} - \frac{g}{2\tau} - \lambda \frac{(\eta\tau - 1)^4}{6} dq$

③ $\hat{\mathcal{L}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_t^2}{2} + \frac{\eta_t^2}{6} - \frac{g}{2\tau} - \lambda \frac{(\eta\tau - 1)^2}{6} dq$

On retrouve le Lagrangien original si $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\hat{\mathcal{L}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_t^2}{2} + \frac{\eta_t^2}{6} - \frac{g}{2\tau} - \lambda \frac{(\eta - \frac{1}{\tau})^2}{6} dq$$
$$\begin{cases} \tau_t - u_q = 0, \\ u_t - \left(\frac{g}{\tau^3} + \frac{\lambda}{\tau^3} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2}{3}\eta \right) \right) \tau_q - \frac{\lambda \eta_q}{3\tau^2} = 0, \\ \eta_{tt} = \lambda \left(\frac{1}{\tau} - \eta \right). \end{cases}$$

Vitesse d'ondes :

$$\xi_{1,2} = 0, \quad \xi_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{g}{\tau^3} + \frac{\lambda}{\tau^3} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2}{3}\eta \right)}.$$

Le modèle est conditionnellement hyperbolique $\eta < \frac{3}{2} \left(\frac{g}{\lambda} + \frac{1}{\tau} \right)$.

Similaire à Liapidevskii and Gavrilova (2008)

$$\hat{\mathcal{L}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_t^2}{2} + \frac{\eta_t^2}{6} - \frac{g}{2\tau} - \lambda \frac{(\eta\tau - 1)^4}{6} dq$$

Système d'équations :

$$\begin{cases} \tau_t - u_q = 0, \\ u_t - \left(\frac{g}{\tau^3} + 2\lambda(\eta\tau - 1)^2\eta^2 \right) \tau_q - \frac{2\lambda}{3}(\tau\eta - 1)^2(4\tau\eta - 1)\eta_q = 0, \\ \eta_{tt} = -2\lambda(\eta\tau - 1)^3\tau. \end{cases}$$

Vitesses d'ondes :

$$\xi_{1,2} = 0, \quad \xi_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{g}{\tau^3} + 2\lambda(\eta\tau - 1)^2\eta^2}.$$

Vitesse de phase :

$$c_p^2 = \frac{g}{\tau^3}.$$

Ce modèle n'est pas dispersif

$$\hat{\mathcal{L}} = \int_{-\infty}^{\infty} = \frac{x_t^2}{2} + \frac{\eta_t^2}{6} - \frac{g}{2\tau} - \lambda \frac{(\eta\tau - 1)^2}{6} dq$$

Modèle

$$\begin{cases} \tau_t - u_q = 0, \\ u_t - \left(\frac{g}{\tau^3} + \frac{\lambda}{3} \eta^2 \right) \tau_q - \frac{\lambda}{3} (2\tau\eta - 1) \eta_q = 0, \\ \eta_{tt} = -\lambda (\eta\tau - 1) \tau. \end{cases}$$

Vitesses d'ondes

$$\xi_{1,2} = 0, \quad \xi_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{g}{\tau^3} + \frac{\lambda}{3} \eta^2}$$

Vitesses de phases $c_p = \omega k$

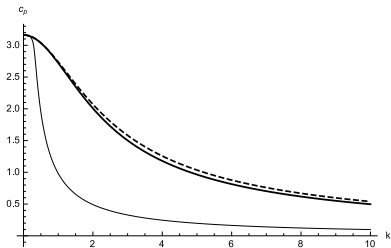
$$(c_p^\pm)^2 = \frac{\frac{g}{\tau_0^3} + \frac{\lambda}{3\tau_0^2} + \frac{\lambda\tau_0^2}{k^2} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{\tau_0^3} + \frac{\lambda}{3\tau_0^2} + \frac{\lambda\tau_0^2}{k^2} \right)^2 - 4 \frac{g\lambda}{\tau_0 k^2}}}{2}.$$

Le modèle est dispersif

Lagrangien 3 : étude de la dispersion

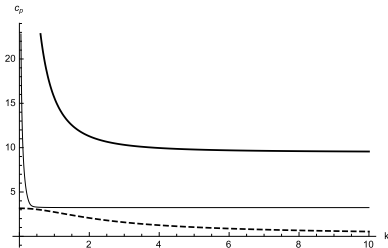
Vitesse de phase du modèle original :

$$c_p^2 = \frac{g}{\tau_0^3 + \frac{k^2}{3\tau_0}}$$



$$(c_p^-)^2$$

$$\tau_0 = 1 \text{ m}^{-1}, \lambda = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}, \lambda = 160 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$



$$(c_p^+)^2$$

Formulation Eulérienne :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S},$$

$$\mathbf{U} = (h, hu, h\eta, hw)^T,$$

$$\mathbf{F} = \left(hu, hu^2 + \frac{gh^2}{2} - \frac{\lambda}{3} \left(\frac{\eta}{h} - 1 \right) \eta, h\eta u, hwu \right)^T$$

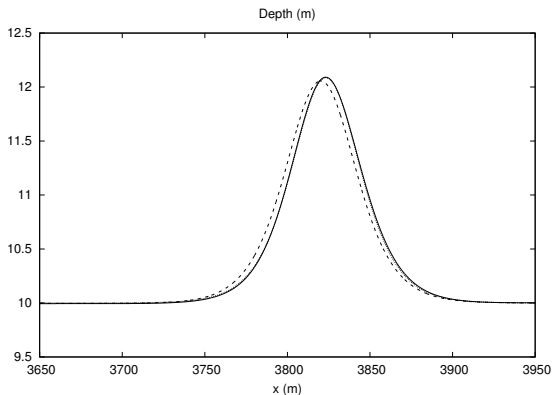
$$\mathbf{S} = \left(0, 0, hw, -\lambda \left(\frac{\eta}{h} - 1 \right) \right)^T.$$

Découpage de type 'Strang' en 2 pas :

- Pas hyperbolique
- Système d'équation différentielle ordinaire avec solution exacte

Ondes solitaires

$$h(\xi) = h_1 + (h_2 - h_1) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{3(h_2 - h_1)}{h_2 h_1^2}} \right),$$
$$u(\xi) = D \left(1 - \frac{h_1}{h(\xi)} \right), \quad \xi = x - Dt, \quad D^2 = gh_2$$

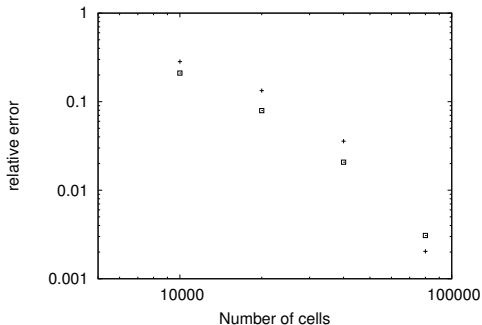


$$h_1 = 10 \text{ m},$$
$$h_2 = 12.1 \text{ m},$$
$$g = 10 \text{ m/s}^2.$$
$$\lambda_1 = 300 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$
$$\lambda_2 = 3000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

2 types d'erreurs :

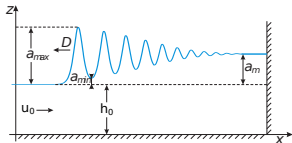
- erreur liée au Lagrangien étendu ($\propto 1/\lambda$)
- erreur due au schéma numérique (diffusion) ($\propto \Delta x \sqrt{\lambda}$)

Précision sur la hauteur de l'onde solitaire

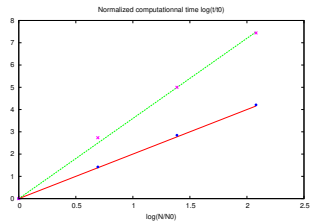
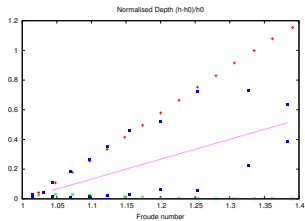
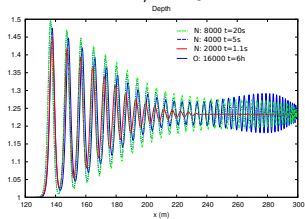


\square : $\lambda = 300 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
 $+$: $\lambda = 3000 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Ondes de Favre



$$u = 0.63 \text{ m/s}, h_0 = 1 \text{ m} :$$



Equation de Lordanskii-Wijngaarden-Kogarko

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$
$$\frac{\overset{t}{\partial} \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{l}) = 0,$$

Equation de Rayleigh-Lamb :

$$p = p_g + \rho_l \left(\frac{3}{2} \dot{R}^2 + R \ddot{R} \right)$$

Lagrangien

$$\mathcal{L} = \int_{D(t)} \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} - W(\rho, \dot{\rho}) \right) dD,$$

$$W(\rho, \dot{\rho}) = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 n p_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - 2\pi n \rho_l \rho R^3 \dot{R}^2.$$

$$4\pi R^3 = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{Y_l}{\rho_l} \right),$$

Liquide à bulles : Lagrangien étendu

The augmented Lagrangian of the bubbly fluid reads :

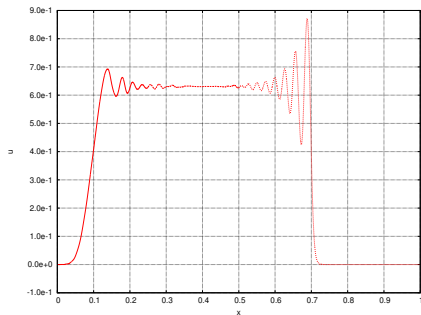
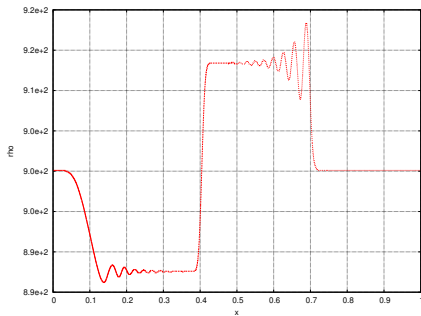
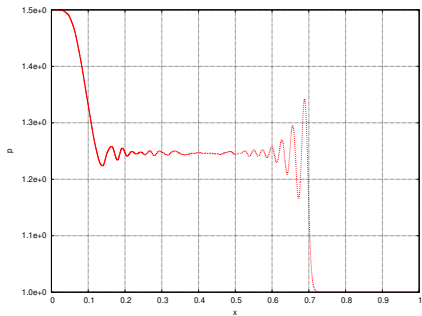
$$\mathcal{L} = \int_{D(t)} \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{\rho \dot{\eta}^2}{2} - \frac{4}{3} \pi R^3 \rho n}{\gamma - 1} p_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \frac{\lambda \rho}{2} \left(\frac{f(\eta)}{\rho} - 1 \right)^2 \right) dD$$

$$f(\eta) = \left(\frac{Y_l}{\rho_l} + \frac{4\pi n}{3} \left(\frac{5}{2} \eta \right)^{\frac{6}{5}} \right)^{-1}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \left(p_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \lambda f(\eta) \left(\frac{f(\eta)}{\rho} - 1 \right) \right) \mathbf{l} \right) = 0, \\ \frac{\partial \rho \eta}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \eta \mathbf{u}) = \rho \zeta \\ \frac{\partial \rho \zeta}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \zeta \mathbf{u}) = -\frac{\lambda}{\beta} \left(\frac{f(\eta)}{\rho} - 1 \right) f'(\eta) \end{array} \right.$$

Liquide à bulles : résultats numériques

These de S. Tkachenko



Exemple : Schrödinger Non linéaire defocussing
(Transformation de Madelung)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + p}{\partial x} = 0, \text{ avec } p = \frac{\rho^2}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \right)$$

Autre applications : écoulement de films minces avec capillarité,
cristaux phononiques...

Comment résoudre les termes en ρ_{xxx}

Lagrangien original :

$$L = \int_{\Omega_t} \left(\rho \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} - \frac{\rho^2}{2} - \frac{\epsilon^2}{4\rho} \frac{\|\nabla \rho\|^2}{2} \right) d\Omega_t$$

Lagrangien étendu

$$L = \int_{\Omega_t} \left(\rho \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} - \frac{\rho^2}{2} - \frac{\epsilon^2}{4\rho} \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\eta}{\rho} - 1 \right)^2 + \frac{\beta\rho}{2} w^2 \right) d\Omega_t$$

$\mathbf{p} = \nabla\eta$ et $w = \dot{\eta}$

$-\frac{\lambda}{2} \left(\frac{\eta}{\rho} - 1 \right)^2$: pénalisation

$\frac{\beta\rho}{2} \dot{\eta}^2$: régularisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P \mathbf{I} + \frac{\epsilon^2}{\rho} \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \right) = 0 \\ \frac{d\eta}{dt} = w \\ \beta \rho \frac{dw}{dt} - \operatorname{div} \left(\frac{1}{4\rho} \mathbf{p} \right) = -\frac{\lambda}{\rho} \left(\frac{\eta}{\rho} - 1 \right) \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} - w) = 0 \end{array} \right.$$

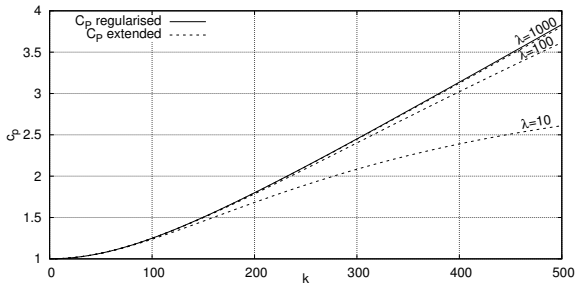
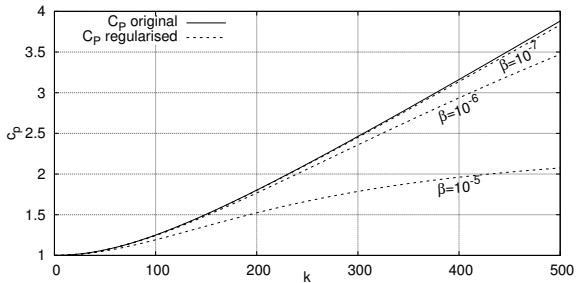
$$P = \frac{\rho^2}{2} - \frac{1}{4\rho} |\mathbf{p}|^2 + \eta \lambda \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + \frac{\rho^2}{2} + \eta \lambda \left(1 - \frac{\eta}{\rho}\right)}{\partial x} = 0 \\ \frac{d\eta}{dt} = w \\ \beta \rho \frac{dw}{dt} - \frac{\partial \frac{p_1}{4\rho}}{\partial x} = -\frac{\lambda}{\rho} \left(\frac{\eta}{\rho} - 1\right) \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1 u - w}{\partial x} = 0; \quad \text{curl}(\mathbf{p}) = 0 \end{array} \right.$$

Vitesse d'ondes :

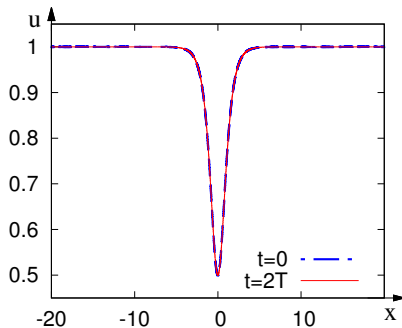
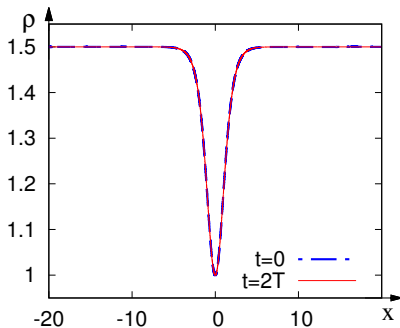
$$\xi_{1,2} = u; \quad \xi = u \pm \sqrt{\rho + \lambda \frac{\eta^2}{\rho^2}} \quad u \pm \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4\beta\rho^2}}$$

Choix de λ et β



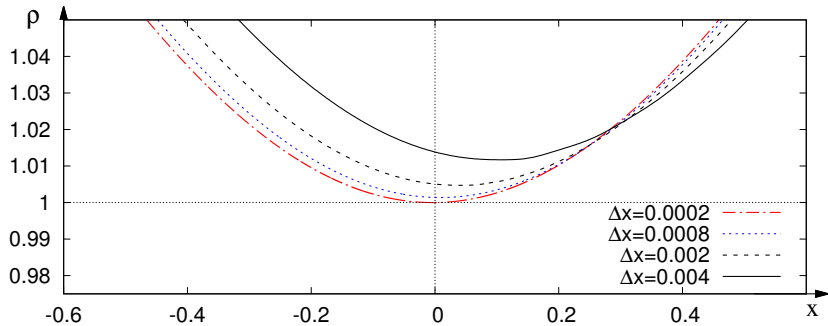
Solution exacte

$$\rho = \rho_{\infty} - \frac{\rho_{\infty} - \rho_{min}}{\cosh^2(\sqrt{\rho_{\infty} - \rho_{min}}(x - Ut))} \quad u = U - \frac{\rho_{\infty}\sqrt{\rho_{min}}}{\rho}$$

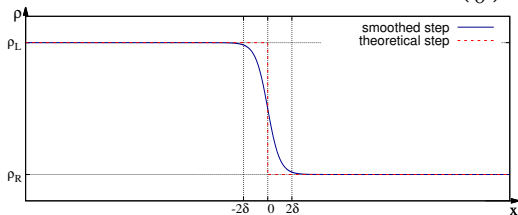


$$\beta = 10^{-4}, \lambda = 500,$$

Soliton gris

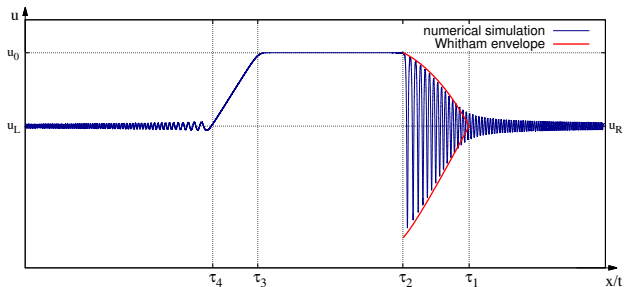
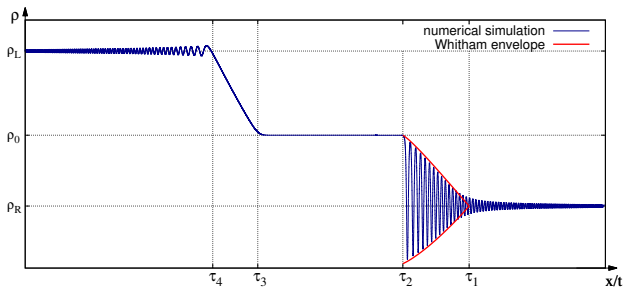


Condition initiale régularisée en $\tanh\left(\frac{x}{\delta}\right)$



$$u = 0$$

Problème de Riemann dispersif



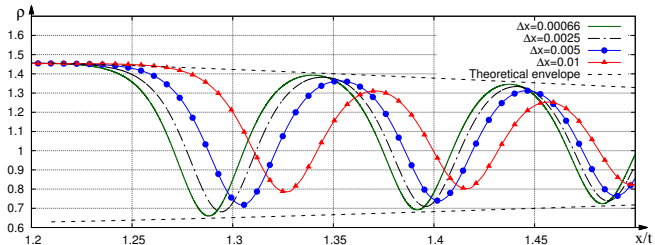
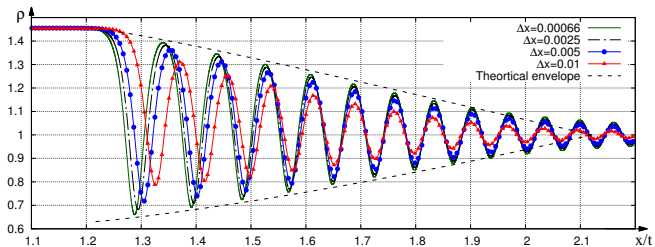
$$\Delta x = 0.66710^{-3}$$

$$\beta = 2.10^{-5}$$

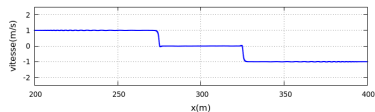
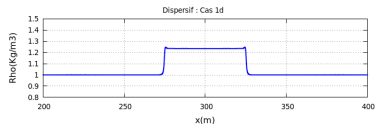
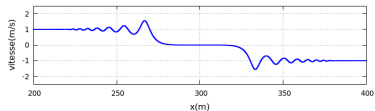
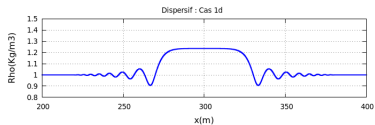
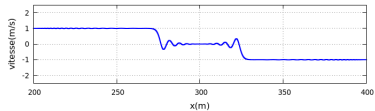
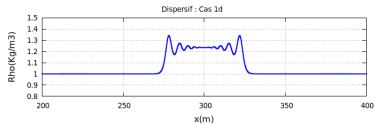
$$\delta = 0.1$$

$$t = 70s$$

Problème de Riemann dispersif



Compétition dispersion intertelle dispersion second gradient



$$E = \rho^2 + \frac{\beta\rho}{6} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{\epsilon}{8\rho} |\nabla\rho|^2$$

$$\frac{\epsilon}{\beta} = 10^{-5}, \frac{\epsilon}{\beta} = 20, \frac{\epsilon}{\beta} = 200$$

Energie potentielle

$$\begin{aligned} W = & \mu_e \|\text{sym}(\nabla u - \mathbf{P})\|^2 + \frac{\lambda_e}{2} \text{tr}(\text{sym}(\nabla u - \mathbf{P}))^2 \\ & + \mu_m \|\text{sym} \mathbf{P}\|^2 + \frac{\lambda_m}{2} (\text{tr}(\text{sym} \mathbf{P}))^2 \\ & + \frac{\mu L_c^2}{2} \|\text{Curl} \mathbf{P}\|^2 \end{aligned}$$

Energie cinétique : $J = \frac{1}{2} \rho \|u_{,t}\|^2 + \frac{1}{2} \mathbf{P}_{,t} \mathbb{J}_m \mathbf{P}_{,t} + \frac{1}{2} \nabla u_{,t} \mathbb{J}_g \nabla u_{,t}$
 u est le déplacement. \mathbf{P} variable étendue

Green Nagdi avec capillarité :

$$W = g \frac{\rho^2}{2} + \sigma |\nabla \rho|^2, \quad J = \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \rho \frac{\dot{\rho}^2}{6}$$

Lagrangien étendu de Green Nagdi avec capillarité

$$W = g \frac{\rho^2}{2} + \sigma |\nabla \eta|^2 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\eta}{\rho} - 1 \right)^2, \quad J = \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \rho \frac{\dot{\eta}^2}{6}$$

- Cas multi-D pour Schrödinger Non linéaire
- Condition aux limites transparentes pour SGN et NLS.
- Introduction de la turbulence pour les écoulements cisailés en présence d'effets capillaires
- Ecoulements de particules
- Solides à bulles et cristaux phononiques

Je vous remercie pour votre attention